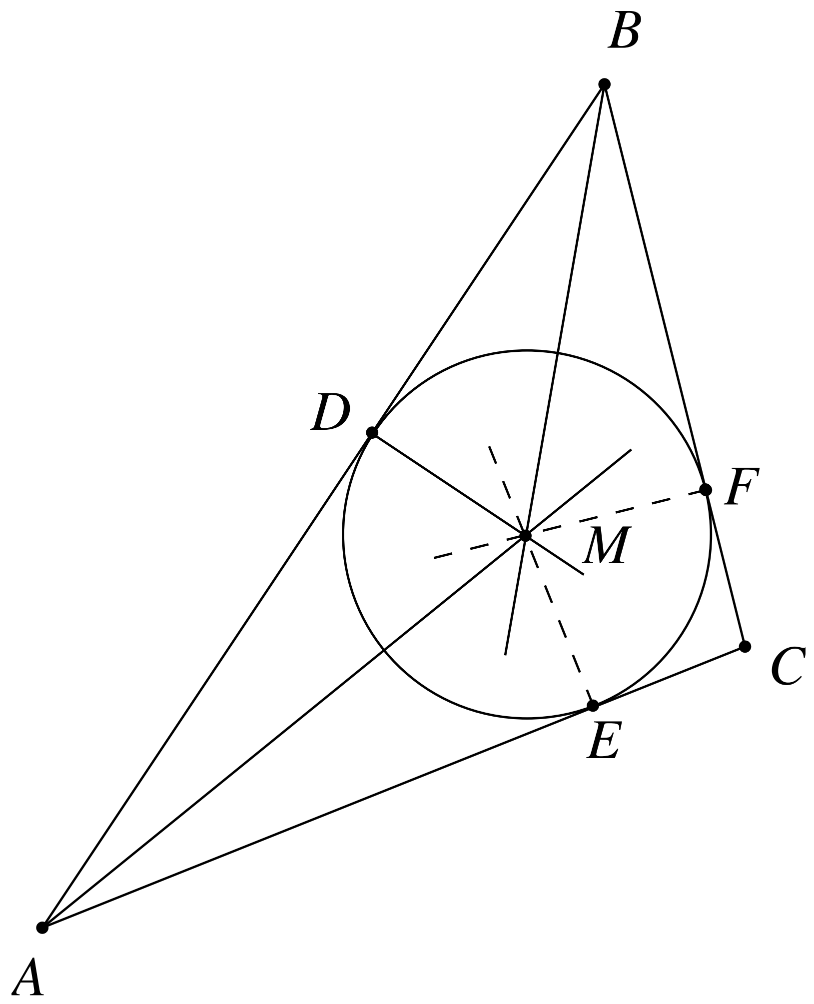


Euklidisk geometri

Johan Wild

2020–11–04

johan.wild@europaskolan.se

2020–11–04

Innehåll

1 Inledning

Denna text är en liten introduktion till den Euklidiska geometrin. Eftersom ambitionen är att visa på dess axiomatiska struktur är den lite mer omfattande än ett normalt läromedel för gymnasiet. Alla bevis finns dock inte utskrivna i denna text, eftersom den då skulle bli för omfattande för sitt syfte.

Däremot är det meningen att texten skall vara självkonsistent i den meningen att alla satser som finns i denna text skall gå att bevisa endast med hjälp av de axiom och satser som texten själv innehåller.

Den Euklidiska geometrin är ett axiomatiskt system som lämpar sig mycket väl för att tydliggöra just dess axiomatiska struktur och inom vilket träning i bevisföring är lämpligt. Bevisen av många satser är skrivna på en tabellform för att underlätta detta.

2 Elementa

Euklides (325 - 265 f Kr) största bedrift var att han skrev ned mycket av den matematik som var känd vid denna tid i en serie böcker med namnet Elementa. Denna innehåller 13 böcker, eller kapitel, som av tradition betecknas med romerska siffror.

Innehållet framställdes axiomatiskt-deduktivt vilket var nytt, men inspirerat från Aristoteles. Ett axiomatiskt system utgörs av en rad fundamentala objekt samt ett regelsystem för vad man får göra med dem.

Inom talteorin utgörs de fundamentala objekten av själva talen, men man definierar också vad som menas med primtal, delare, multiplikativ invers, Diofantisk ekvation med mera. Det man får göra med tal är förstås att räkna med dem.

I den Euklidiska geometrin är de fundamentala objekten punkter, linjer, trianglar, cirklar med mera, vi återkommer till detta. Det man får göra med dessa är till exempel att man får dra en linje genom två punkter, och rita cirklar med en passare.

Deduktiv bevisföring betyder att resultatet är en logisk följd av givna förutsättningar. Motsatsen är induktiv bevisföring där slutsatser dras från enstaka (vanligtvis flera) händelser.

Ett påstående som kan visas vara sant inom talteorin är att det finns oändligt många primtal. I den Euklidiska geometrin är förmodligen Pythagoras sats det mest kända sanna påståendet.

Elementa är så gedigen att den har använts som läromedel under mer än 2000 år. Det är bara på senare årtionden som svenska läromedel lämnat den axiomatiska framställningen av geometrin.

2.1 Definitioner i Elementa

Elementa börjar med 23 definitioner. Eftersom ambitionen var att nästan ingenting skall krävas som förkunskap blir flera av definitionerna ganska kryptiska, se speciellt nummer 4 nedan.

Begrunda att detta alltså formulerades för ca 2300 år sedan och lästes av dåtidens intellektuella. Det kanske säger något om det samhället att man hade tid och möjlighet att ägna sig åt denna sorts helt abstrakta formuleringar.

1. En punkt är det som inte kan delas.

2. En linje är en längd utan bredd.

3. En linjes extremiteter är punkter.

4. En rät linje är en linje som ligger jämnt mellan punkterna på densamma.

5. En yta har bara längd och bredd.

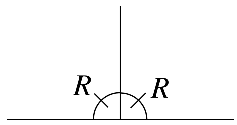
6. En ytas extremiteter är linjer.

7. En plan yta är en yta vars punkter ligger jämnt längs linjerna i densamma.

8. En plan vinkel är lutningen mot varandra av två linjer i ett plan som möter varandra och som inte ligger på en rät linje.

9. När två räta linjer skär varandra kallas vinkeln mellan dem rätlinjig vinkel.

10. Om en rät linje står på en annan rät linje och bildar lika närbelägna vinklar, så kallas de lika vinklarna räta och den räta linje som står på den andra kallas en normal till den på vilken den står.



11. En trubbig vinkel är en vinkel större än en rät vinkel.

12. En spetsig vinkel är en vinkel mindre än en rät vinkel.

13. En gräns är det som är extremitet av någonting.

14. En figur är det som har en eller flera gränser.

15. En cirkel är en plan figur bestående av en gräns sådan att alla räta linjer som faller på den från en punkt är lika.

16. Och denna punkt kallas cirkelns centrum.

17. En cirkels diameter är en rät linje som går genom cirkelns centrum och som begränsas av cirkeln.

18. En halvcirkel är en figur vars gräns är cirkelns diameter och en av de delar som diametern klyver cirkeln i.

19. Rätlinjiga figurer är de vars gräns är räta linjer. En triangel är en rätlinjig figur med tre sidor. En fyrhörning är en rätlinjig figur med fyra sidor. Är sidorna fler än fyra kallas figuren månghörning.

20. En liksidig triangel är triangel där alla sidor är lika. En likbent triangel är triangel där två sidor är lika.

21. En rätvinklig triangel är en triangel med en vinkel som är rät. En trubbvinklig

triangel är en triangel med en vinkel som är trubbig. En spetsvinklig triangel är en triangel där alla vinklar är spetsiga vinklar.

22. Av fyrhörningarna är kvadraten den som är både liksidig och rätvinklig, rektangeln den som är rätvinklig men inte liksidig, romben den som är liksidig men inte rätvinklig, parallellogrammet den som inte är rätvinklig men där motstående sidor parvis är lika. Alla andra fyrhörningar är trapetser.

23. Parallella räta linjer är räta linjer som ligger i samma plan och som, om de förlängs godtyckligt i båda riktningarna, inte möter varandra i någon riktning.

2.2 Postulat och Axiom

Definitionerna handlar mest om vad saker är eller hur de benämns. Efter definitionerna följer påståenden vad man kan göra (1-3 nedan) med det som är definierat, eller hur det hänger ihop (4 och 5 nedan). Dessa påståenden kan ej bevisas, de får förutsättas vara sanna. Sådana sanningar benämns *postulat*.

Man kan också säga att definitionerna målar upp ett slags universum som bara innehåller punkter, linjer, plan, vinklar, cirklar och så vidare. Postulaten beskriver sedan vad man kan göra i detta universum och vilken struktur detta universum har.

2.2.1 Postulaten i Elementa

I Elementa ges följande postulat.

1. Man kan dra en rät linje från en punkt till en annan.

2. Man kan förlänga en ändlig rät linje kontinuerligt till en rät linje.

3. Man kan dra en cirkel med en godtycklig medelpunkt och en godtycklig sträcka som radie.

4. Alla räta vinklar är lika.

5. Parallellpostulatet. Om en rät linje faller på två räta linjer så att de inre vinklarna på samma sida tillsammans utgör mindre än två räta vinklar, de två räta linjerna, om de förlängs obegränsat, skär varandra på den sida där vinklarna är mindre än två räta.

2.2.2 Axiomen i Elementa

Enligt Aristoteles skall *axiom* vara sanningar som är mer fristående från en enskild vetenskap än postulaten. Testa till exempel med att applicera axiom nummer 1 nedan på tre trianglar, tre tal eller tre bananer.

1. Storheter som är lika med en och samma storhet är också inbördes lika.

2. Om lika storheter adderas till lika storheter, så är summorna lika.

3. Om lika storheter subtraheras från lika storheter, så är skillnaderna lika.

4. Storheter som sammanfaller med varandra är lika.

5. Det hela är större än sina delar.

2.3 Definitioner, axiom och postulat i denna kurs

Som nämndes i inledningen har vi inte tid att behandla geometrin lika detaljerat som Euklides gjorde. Vi måste utgå från en intuitiv uppfattning om vad som menas med till exempel en linje.

Här följer de axiom vi kommer att utgå ifrån i denna text.

Axiom 2.3.1. Genom två punkter går det endast att dra en linje.

Axiom 2.3.2. Genom en punkt utanför en linje går det endast att dra en och endast en linje, som är parallell med den första linjen.

Axiom 2.3.3. En geometrisk figur kan flyttas och vändas utan att dess form eller storlek ändras.

Axiom 2.3.4. I de fall det behövs används detta axiom för att hänvisa till ”vanlig räkning”.

I den Euklidiska geometrin gäller alltså följande. Om man har en linje och en punkt utanför linjen, går det bara **en** linje genom den punkten som är parallell med linjen.

Det finns alltså andra geometrier där detta inte gäller. På ytan av ett klot finns det ingen sådan linje. En *storcirkel* på ett klot motsvarar det som är en rät linje i den Euklidiska geometrin. En storcirkel är skärningskurvan som uppkommer mellan klotet och ett plan som går genom klotets medelpunkt. På jordklotet är ekvatorn exempel på en storcirkel. Polcirkeln är däremot inte en storcirkel.

På ett klot skär alla storcirklar varandra, så det finns inga parallella linjer. Sådana geometrier benämns *elliptiska.* Man kan definiera något som beskriver hur ytan kröker sig, och för elliptiska geometrier är krökningen positiv.

På en *sadelyta* däremot finns oändligt många linjer genom en punkt utanför en given linje som inte skär den givna linjen. Sådana geometrier benämns *hyperboliska*, och har negativ krökning.

Per definition är alltså Euklidiska geometrier varken elliptiska eller hyperboliska. De benämns ibland *platta*, och har krökning noll.

Dessa begrepp var helt okända för Euklides och de andra gamla grekiska matematikerna. Matemtiken för generella geometrier utvecklades på 1800-talet.

3 Kongruenta trianglar

Här behandlas vad som gäller om två trianglar har samma form, eller snarare det omvända: Vad krävs för att två trianglar skall ha samma form? Många senare bevis kommer nämligen att bygga just på att trianglar har samma form, eller med ett finare ord, är *kongruenta.*

Ordet kongruent kommer från latinets congruere vilket betyder sammanträffa, sammanfalla, stämma.

3.1 Hur man anger punkter och linjer

Punkter anges med versaler, dvs stora bokstäver. Genom två punkter får man dra en linje enligt axiom 2.3.1.

En linje är oändligt lång. Ett *linjesegment* är en del av en linje, och anges med de två ändpunkterna, exempelvis linjesementet AB. Ibland anges en linje eller ett linjesegment med en gemen, dvs en liten bokstav.

I denna text saknar linjesementen riktning. Det betyder att AB och BA är samma linjesegment. Annars skulle $AB = -BA$ gälla.

Längden av ett linjesegment AB tecknas $|AB|$.

Det är viktigt att komma ihåg att avstånd och längder inte *mäts*, de representerar inte tal. Däremot kan man ställa in en passare så att man kan kopiera ett avstånd.

Detta benämns ofta ”mät upp med passaren” men resultatet blir alltså en inställning på passaren, inte ett tal.

3.2 Hur man anger trianglar och vinklar

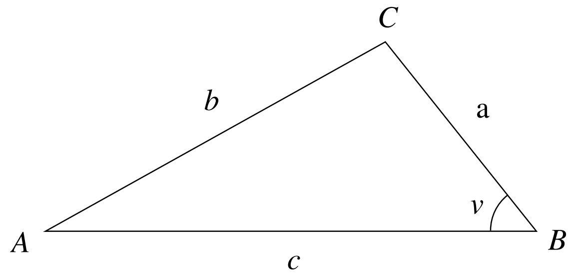
Då man i text vill referera till en triangel, eller månghörningar generellt, brukar man ange triangelns hörn. För att göra skrivsättet ännu mer kompakt används en liten triangel för att ange att en figur är just en triangel. Figuren nedan visar till exempel $\triangle ABC$.

Vinklar anges antingen genom att man anger det hörn där vinkelns ben möts, med en liten vinkel som symbol framför. Triangeln nedan har till exempel en vinkel $\angle B$. Man kan också ange vinklar genom att man anger en serie om tre punkter som tillsammans utgör vinkelns två ben, exempelvis $\angle ABC$. Ibland blir figurer mer läsbara om en enskild vinkel ges ett eget namn som vinkeln v nedan. Då utelämnas vinkelsymbolen. Ska man vara petig står v för *storleken* av $\angle B$, men vi låter alltså v vara ett alternativt namn på $\angle B$.

I denna text är alla vinklar positiva, men om man anger vinklar med tecken skulle $\angle ABC = -\angle CBA$.

För trianglar finns dessutom konventionen att den sida som står mot en punkt anges med samma (gemena) bokstav som punkten. Triangeln nedan har sidan AB som är samma sida som c eftersom den står mot punkten C.

För tredimensionella figurer måste man göra skillnad på kant och sida. Jämför med engelskan: hörn – vertex, kant – edge, sida – face. En kub har 8 hörn, 12 kanter och 6 sidor.



En rät vinkel betecknas R. Vi använder oss av Euklides definition nr 10 på sidan 5 för en rät vinkel.

3.3 Definition och satser

Definition 3.3.1. Två trianglar är *kongruenta* om de tre sidorna och de tre vinklarna i den ena triangeln är lika med motsvarande element i den andra triangeln. Som beteckning för detta används skrivsättet

$$\triangle ABC \cong \triangle DEF.$$

Sats 3.3.2. Kongruensfall två sidor *Om två sidor och mellanliggande vinkel i en triangel är lika med motsvarande element i en annan triangel, så är trianglarna kongruenta.*

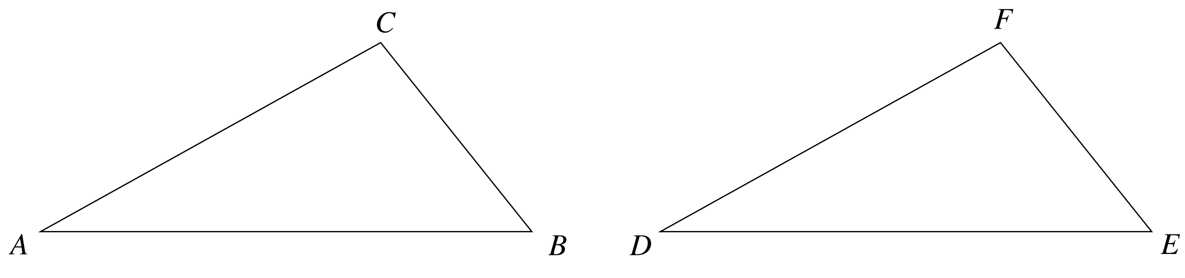
Observera att satsen är skriven utan att referera till någon specifik figur eller annat exempel. Ett bevis av satsen bör dock innehålla en figur med lämpliga beteckningar för att det skall bli läsbart. När man ritar en figur till ett bevis bör man tänka på att inte rita den med några speciella egenskaper som gör att läsaren, eller du själv, ser sånt som inte finns. Till exempel är det olämpligt att i beviset för denna sats rita en triangel som är likbent eller rätvinkligt.

Det är bra att strukturera upp beviset så att man inleder med att precisera hur förutsättningarna i satsen blir med de beteckningar man har i sin figur. Det är också bra att precisera exakt vad som skall bevisas med de beteckningar man infört.

Följande bevis är inte skriven med löpande text, vilket annars är brukligt. Syftet är att tydliggöra argumentationen.

Bevis. (Av sats 3.3.2)

Förutsättningar	**Kvar att visa**
$\lvert AC\rvert = \lvert DF\rvert$	$\angle C = \angle F$
$\lvert AB\rvert = \lvert DE\rvert$	$\angle B = \angle E$
$\angle A = \angle D$	$\lvert BC\rvert = \lvert EF\rvert$



Påstående	**Motivering**
$\triangle DEF$ flyttas så att D sammanfaller med A och DF faller utefter AC.	Axiom 2.3.3 (förflyttning av figur).
F sammanfaller med C.	$\|AC\| = \|DF\|$ enligt förutsättningar.
DE faller utefter AB.	$\angle A = \angle D$
E sammanfaller med B.	$\|AB\| = \|DE\|$
$\|BC\| = \|EF\|$	Axiom 2.3.1
Alla vinklar i $\triangle DEF$ är lika med sin motsvarighet i $\triangle ABC$.	Trianglarnas punkter sammanfaller parvis med varandra.
$\triangle ABC \cong \triangle DEF$	Alla förutsättningar enligt definition är uppfyllda.

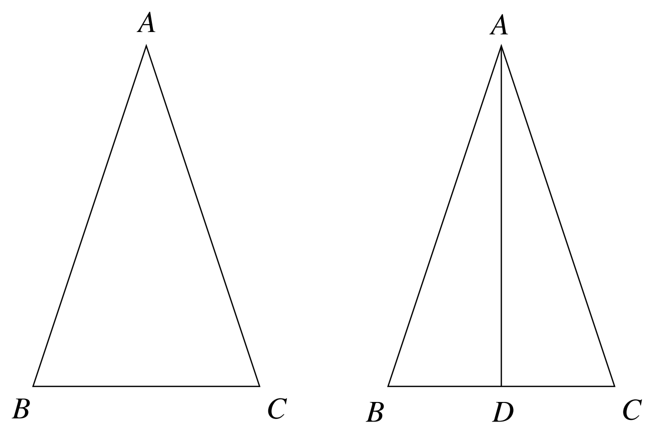
□

Definition 3.3.3. En *likbent triangel* är en triangel där två sidor är lika långa. En liksidig triangel är en triangel där alla sidor är lika långa.

Sats 3.3.4. *I en likbent triangel är de vinklar som står mot de båda lika långa sidorna lika stora.*

Bevis.

Förutsättningar	**Kvar att visa**
$\|AB\| = \|AC\|$	$\angle B = \angle C$



Påstående	**Motivering**
Punkten D finns på BC så att $\angle BAD = \angle DAC$.	Uppenbart (se anmärkning 3.3.6).
$\|AB\| = \|AC\|$	Enligt förutsättningarna.
$\angle BAD = \angle DAC$	Enligt ovan.
AD gemensam i $\triangle ABD$ och $\triangle ADC$.	Uppenbart.
$\triangle ABD \cong \triangle ADC$	Förutsättningar i sats 3.3.2 (kongruensfall två sidor) är uppfyllda.
$\angle B = \angle C$	$\triangle ABD \cong \triangle ADC$

□

Anmärkning 3.3.5. Många geometriska bevis inleds med en ”smart” konstruktion, varefter allt annat följer på rutin. Det ”smarta” här är att dra linje AD.

Anmärkning 3.3.6. Vi skall senare se att linje AD är en bisektris till vinkel A. Man kan invända mot detta bevis att begreppet bisektris inte är definierat ännu. Man skall ju inte använda icke-definierade begrepp i ett bevis eller stödja sig på annat än axiom eller redan bevisade påståenden. I detta fall finns dock ingen logisk lucka eftersom det måste finnas en linje som delar vinkel A i två lika delar.

Euklides bevisade denna sats på ett annorlunda sätt. Beviset återgivet ovan härrör från professor James Thomson i Glasgow år 1849.

Sats 3.3.7. Kongruensfall tre sidor *Om de tre sidorna i en triangel är lika med motsvarande element i en annan triangel, så är trianglarna kongruenta.*

Sats 3.3.8. Kongruensfall två vinklar *Om två vinklar och mellanliggande sida i en triangel är lika med motsvarande element i en annan triangel, så är trianglarna kongruenta.*

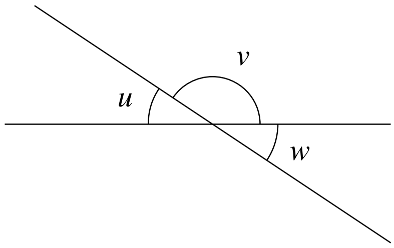
Generellt gäller att om man vet tre kan man räkna ut (nästan) allt annat. Känner man tre sidor (som i sats 3.3.7), två vinklar och en sida (som i sats 3.3.8) eller två sidor och en vinkel (som i sats 3.3.2) kan man räkna ut övriga sidor och vinklar.

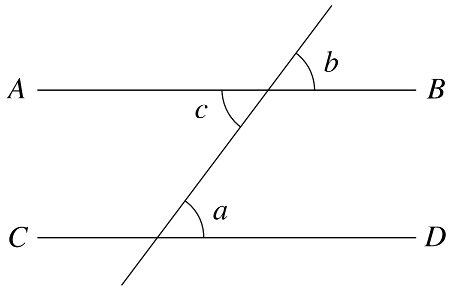
Undantaget är om man bara känner tre vinklar, kan man inte räkna ut mer än förhållandet mellan sidorna. I det fallet vet man inget om hur stor triangeln är.

4 Vinklar

4.1 Inledande definitioner

Det är praktiskt att införa namn för vinklar som befinner sig relativt varandra på olika sätt.





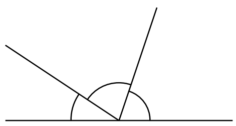
Definition 4.1.1. Om två linjer skär varandra, som i den vänstra av figurerna ovan, benämns vinklarna u och v *sidovinklar*. Summan av två sidovinklar är två räta. Vinklarna u och w benämns *vertikalvinklar*.

Definition 4.1.2. Om två parallella linjer skärs av en tredje, som i den högra av figurerna ovan, benämns vinklarna a och b *likbelägna vinklar*. Vinklarna a och c benämns *alternatvinklar*.

Begreppet sidovinklar kan generaliseras till att gälla fler än två vinklar. Vi gör följande definition.

Definition 4.1.3. Om två eller flera strålar utgår från samma punkt på en linje, benämns de vinklar som då bildas *supplementvinklar*. Summan av dessa är två räta.

Figuren nedan visar ett exempel med tre vinklar som är supplementvinklar.



4.2 Satser

Sats 4.2.1. *Vertikalvinklar är lika stora.*

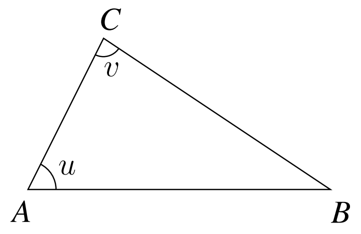
Bevis. Se figur ovan.

Förutsättningar	**Kvar att visa**
	$u = w$

Påstående	**Motivering**
$u + v = 2R$	De är sidovinklar.
$v + w = 2R$	De är sidovinklar.
$u + v = v + w$	Axiom 2.3.4 (vanlig räkning).
$u = w$	Axiom 2.3.4 (vanlig räkning).

□

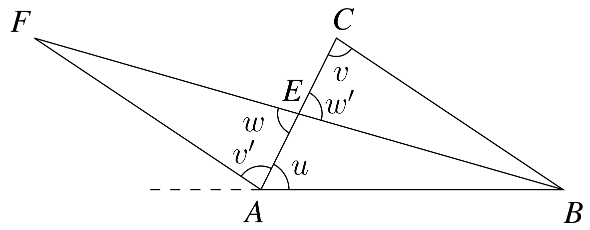
Sats 4.2.2. *I en triangel är två vinklar tillsammans alltid mindre än två räta.*



Bevis.

Förutsättningar	**Kvar att visa**
(I detta påstående förutsätts inget speciellt om triangeln. Det är i själva verket en viktig poäng med det! Beviset skall gälla alla trianglar!)	Vi väljer att visa att $u + v < 2R$ i figuren ovan.

Figuren kompletteras succesivt i argumentationen som följer.



Påstående	**Motivering**
E konstrueras på sida AC så att $\lvert AE\rvert = \lvert CE\rvert$.	Går att konstruera[1].
Från punkt B dras linjen BE samt dess förlängning EF så långt att $\lvert BE\rvert = \lvert EF\rvert$.	Axiom 2.3.1.
Linje AF dras.	Axiom 2.3.1.
$w = w'$	Sats 4.2.1 (vertikalvinklar).
$\triangle CEB \cong \triangle AEF$	Förutsättningarna för sats 3.3.2 (kongruensfall två sidor) är uppfyllda.
$v' = v$	$\triangle CEB \cong \triangle AEF$
$v' + u < 2R$	Jämför med förlängningen av AB.
$v + u < 2R$	$v' = v$

□

Sats 4.2.3. *Om två linjer skärs av en tredje är varje par alternatvinklar lika stora om och endast om de två första linjerna är parallella.*

Denna sats innehåller formuleringen om och endast om. Detta skall tolkas på följande sätt. Antag att ”och endast om” hade varit utelämnat. Då hade formuleringen inneburit att det kan finnas andra fall där alternatvinklarna blir lika stora, trots att linjerna inte är parallella. Med tillägget ”och endast om” blir innebörden att det inte kan finnas några sådana fall.

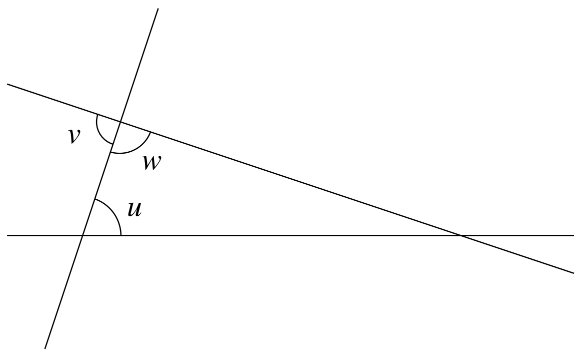
För att bevisa påståendet måste vi alltså först bevisa att lika alternatvinklar leder till (implicerar) parallella linjer. Efter det måste vi visa att parallella linjer leder till lika alternatvinklar. Dessa båda delbevis gör det möjligt att dra slutsatsen att alternatvinklarna är lika om och endast om linjerna är parallella.

Jämför detta med påståendena ”Om det regnar blir gatan blöt.” och ”Om och endast om det regnar blir gatan blöt.”. Det första är sant, men inte det andra. Det kan ju finnas fler anledningar än regn till en blöt gata. Till exempel kan någon ha tvättat en bil som stod parkerad på gatan.

Bevis. (Av sats 4.2.3)

Först skall vi alltså bevisa att lika alternatvinklar leder till parallella linjer. Detta skall göras genom ett motsägelsebevis. Det innebär att vi skall anta något och se att detta leder till någon motsägelse. Då kan vi dra slutsatsen att det vi antog var fel (under förutsättning att vi bara stödjer oss på sådant vi vet är sant).

Förutsättningar	**Kvar att visa**
Alternatvinklarna är lika, $v = u$ i figuren nedan.	Linjerna är parallella.

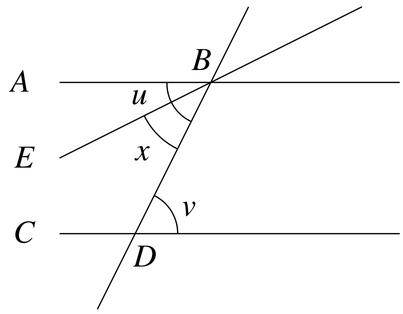


Antagande: Antag att linjerna inte är parallella. Då bildas en triangel enligt definitionen av parallella linjer.

Påstående	**Motivering**
$v + w = 2R$	v och w är sidovinklar.
$u + w = 2R$	$u = v$ enligt förutsättningarna.
$u + w < 2R$	Sats 4.2.2 (två vinklar i en triangel).
Antagandet är felaktigt.	De två påståendena ovan motsäger varandra.

Nu måste vi visa att alternatvinklarna är lika, under förutsättning att linjerna är parallella.

Förutsättningar	**Kvar att visa**
$AB \parallel CD$	Alternatvinklarna är lika, $v = u$.



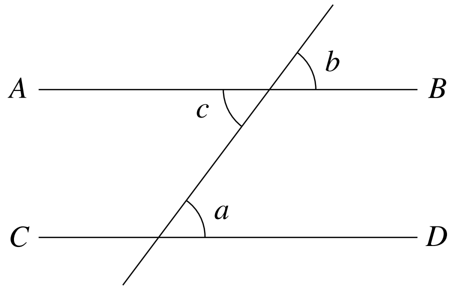
Påstående	**Motivering**
Konstruera EB så att $x = v$.	Går att konstruera[2].
$EB \parallel CD$	Enligt beviset ovan.
$AB \parallel CD$	Enligt förutsättningarna.
EB faller utefter AB.	Axiom 2.3.2 (endast **en** parallell linje).
$x = u$	EB faller utefter AB.
$x = v$	Enligt konstruktionen.
$u = v$	$x = u$

Nu har vi visat att lika alternatvinklar implicerar parallella linjer och vice versa. □

Sats 4.2.4. *Om två linjer skärs av en tredje bildas ett par likbelägna vinklar, som är lika stora om och endast om de båda första linjerna är parallella.*

Bevis. Först visas att om ett par likbelägna vinklar är lika stora, så är de första linjerna parallella.

Förutsättningar	**Kvar att visa**
Ett par likbelägna vinklar är lika stora, $b = a$ i figuren nedan.	Linjerna är parallella, $AB \parallel CD$ i figuren nedan.



Påstående	**Motivering**
$b = c$	Sats 4.2.1 (vertikalvinklar).
$a = c$	$b = a$ enligt förutsättningarna.
$AB \parallel CD$	Sats 4.2.3 (lika alternatvinklar).

Nu visar vi $AB \parallel CD \Rightarrow b = a$.

Förutsättningar	**Kvar att visa**
Linjerna är parallella, $AB \parallel CD$.	Ett par likbelägna vinklar är lika stora, $b = a$.

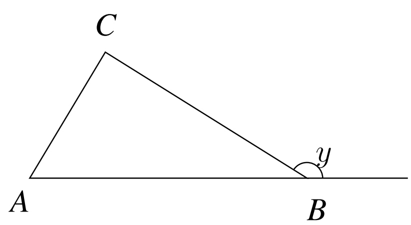
Påstående	**Motivering**
$c = a$	Sats 4.2.3 (lika alternatvinklar).
$b = c$	Sats 4.2.1.
$b = a$	$c = a$

Nu har vi visat ekvivalensen. □

5 Trianglar

5.1 Vinkelsummor och yttervinklar

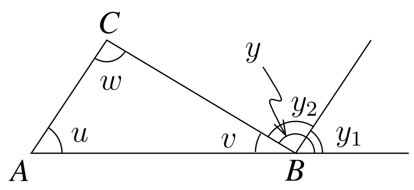
Definition 5.1.1. Vinkel y kallas *yttervinkel* till triangeln ABC.



Sats 5.1.2. Yttervinkelsatsen *En yttervinkel är lika med summan av sina två motstående vinklar.*

Bevis.

Förutsättningar	Kvar att visa
Inga speciella.	$y = u + w$ med beteckningar enligt figuren nedan.



Påstående	Motivering
Drag en stråle från B parallell med AC.	Axiom 2.3.2
$w = y_2$	Sats 4.2.3
$u = y_1$	sats 4.2.4
$y = y_1 + y_2$	Uppenbart i figuren.
$y = u + w$	$u = y_1$ $w = y_2$

□

Sats 5.1.3. Vinkelsumman i en triangel *Vinkelsumman i en triangel är två räta.*

Bevis.

Förutsättningar	Kvar att visa
Inga speciella.	$u + v + w = 2R$ med beteckningar enligt figuren ovan.

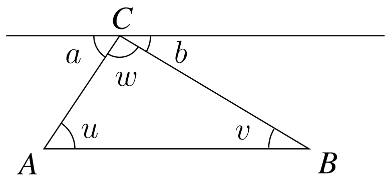
Påstående	Motivering
$v + y = 2R$	v och y är sidovinklar.
$y = u + w$	Sats 5.1.2 (yttervinkelsatsen).
$v + u + w = 2R$	$y = u + w$

□

Om man vill kan man bevisa dessa satser i omvänd ordning.

Bevis. Av sats 5.1.3 som inte bygger på yttervinkelsatsen.

Förutsättningar	**Kvar att visa**
Inga speciella.	$u + v + w = 2R$ med beteckningar enligt figuren nedan.



Påstående	**Motivering**
Drag linje parallell med AB genom punkt C.	Axiom 2.3.2
$a = u$ $b = v$	Sats 4.2.3 (lika alternatvinklar).
$a + w + b = 2R$	Vinklarna är supplementvinklar
$u + w + v = 2R$	$a = u$ $b = v$

□

Ett bevis av yttervinkelsatsen skulle nu i det närmaste vara identiskt med beviset till sats 5.1.3, men ”åt andra hållet”.

Euklides själv var mycket obenägen att använda sig av det femte postulatet (parallellpostulatet). Det beror på att han inte var säker på att det inte kunde bevisas med de övriga postulaten. Detta var i själva verket oklart mycket länge, många har försökt bevisa parallellpostulatet genom åren. Inte förrän i början av 1800-talet insåg man att det femte postulatet kan bytas ut mot andra postulet. Då får man andra geometrier. Dessa är icke-Euklidiska geometrier.

Nu kan vi visa omvändningen till sats 3.3.4.

Sats 5.1.4. *Om en triangel har två lika vinklar, är den likbent.*

Vi använder samma figur som den till beviset av 3.3.4 på sida 10.

Bevis.

Förutsättningar	**Kvar att visa**
$\angle B = \angle C$	$\lvert AB\rvert = \lvert AC\rvert$

Påstående	**Motivering**
Drag en normal DA till BC genom A.	
$\angle ADC = \angle BDA = R$	Definition av normal.
$\angle CAD = \angle BAD$	Sats 5.1.3 (vinkelsumman i triangel).
$\triangle ADC$ och $\triangle ABD$ delar på sida AD	
$\triangle ADC \cong \triangle ABD$	Sats 3.3.8 (kongruensfall två vinklar).
$\lvert AC\rvert = \lvert AB\rvert$	$\triangle ADC \cong \triangle ABD$

□

5.2 Diskussion om n-hörning

Den 19:e definitionen i elementa, se avsnitt 2.1 sidan 5, handlar om rätlinjiga figurer och speciellt månghörningar. Man bör dock observera att det finns en underförstådd detalj här, nämligen att månghörningen skall avgränsa ett enkelt sammanhängande område. Till exempel skulle två icke överlappande trianglar passera som en sexhörning utan detta tillägg.

Genom att dela en fyrhörning i två trianlgar lätt följande resultat.

Sats 5.2.1. *Vinkelsumman i en fyrhörning är fyra räta.*

En generalisering av sats 5.1.3 följer nu.

Sats 5.2.2. *Vinkelsumman i en månghörning med n hörn är* $(n-2)\cdot 2R$*.*

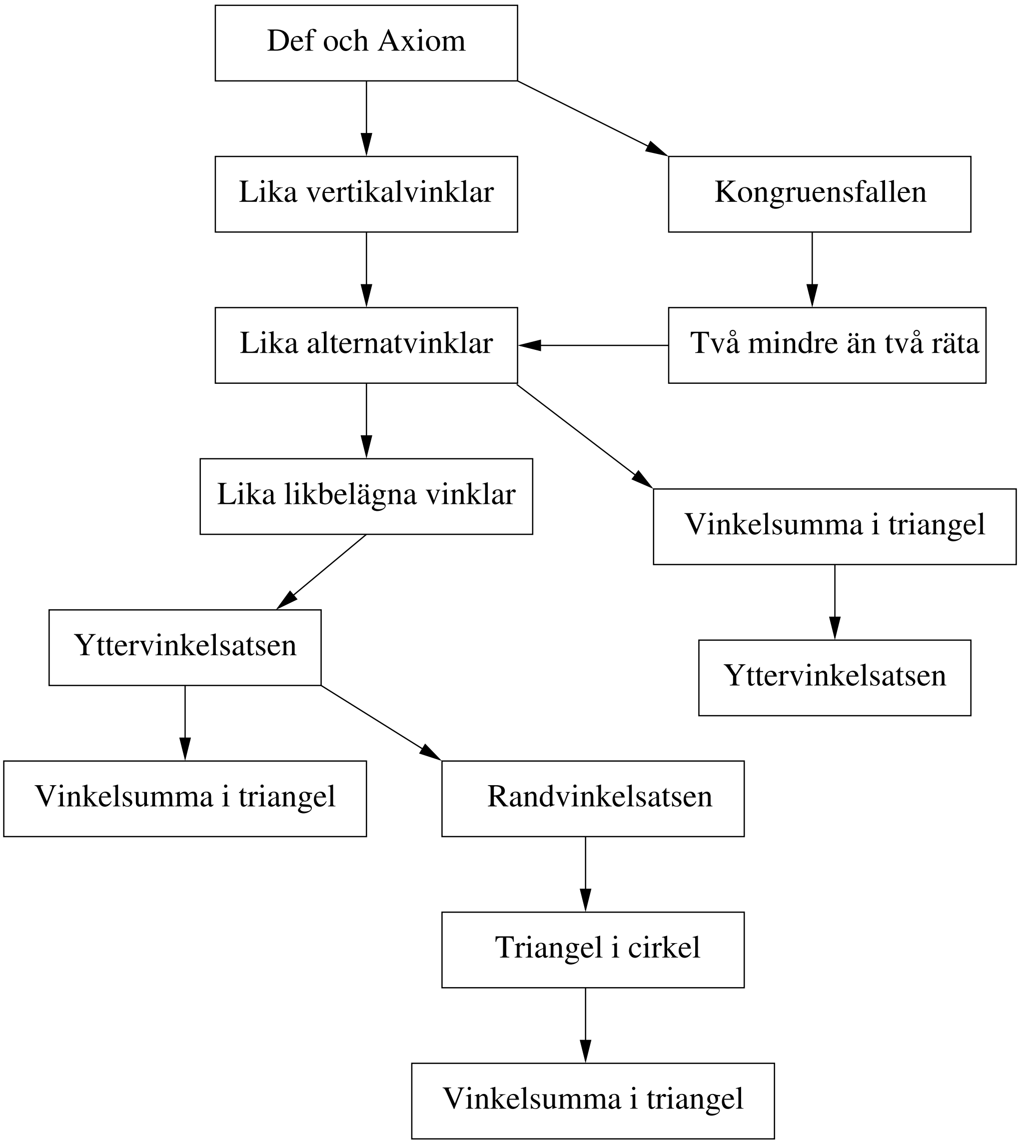
För att bevisa denna sats måste man först övertyga sig om att alla månghörningar går att dela in i ett antal trianglar. Detta steg är dock inte så trivialt som man kan tro, därför utelämnas beviset här.

Ibland definieras en månghörning som något som sätts ihop av trianglar. Då följer satsen trivialt.

5.3 Lite om bevisföring

Som du märkte finns det alltså fler än ett sätt att härleda att vinkelsumman i en triangel är två räta. Antingen kan man bevisa ytervinkelsatsen först eller bygga beviset på att alternatvinklar vid parallella linjer är lika. Lite senare i denna text, i avsnitt 9.2 skall vi också se att man gå ytterligare en väg, nämligen via en sats som heter randvinkelsatsen, sats 9.2.1.

Följande figur illustrerar hur satserna hänger ihop.



Matematiken är alltså inte så statisk som många tror. Det finns ofta flera vägar att gå och vad som känns rätt är en fråga om tycke och smak. Generellt kan man dock säga att det är lämpligt att sträva efter att bygga sina bevis på så få satser som möjligt. Ju färre förutsättningar som krävs för ett bevis, desto generellare blir satsen.

6 Rektanglar och Areor

6.1 Definitioner

Vissa månghörningar har speciella egenskaper som gör dem så viktiga att de fått egna namn. Du känner säkert igen dem, men i en text som denna krävs det precisa definitioner.

Definition 6.1.1. Ett *parallellogram* är en fyrhörning där varje par av motstående sidor är parallella.

När man gör definitioner i matematiken vill man begränsa sig till att säga så lite som möjligt. Notera att definition inte uttalar sig om att sidorna skall vara lika långa eller hur vinklarna i parallellogram förhåller sig till varandra. Det kan istället formuleras som två satser.

Sats 6.1.2. *I ett parallellogram är motstående sidor lika långa och motstående vinklar lika stora.*

Vidare är det praktiskt att precisera följande figurer.

Definition 6.1.3. En *rektangel* är ett parallellogram där alla vinklar är räta.

Definition 6.1.4. En *romb* är ett parallellogram där alla sidor är lika långa.

Definition 6.1.5. En *kvadrat* är en rektangel där alla sidor är lika långa.

Begrunda nu följande sats.

Sats 6.1.6. *En kvadrat är en romb.*

Denna är ett exempel på en sådan sats som är så nära definitionerna att den kan tyckas svår att bevisa. Många skulle nog hävda att ”det är självklart” att den är sann. När man skall bevisa satser av denna typ måste man vara noga med hur definitionen är formulerad.

Bevis. (Av sats 6.1.6). En romb har två egenskaper. Dels är alla sidor lika långa, dels är den ett parallellogram. En kvadrat har per definition lika långa sidor, alltså uppfyller kvadraten det första kriteriet. Dessutom är en kvadrat ett parallellogram, eftersom kvadraten är en rektangel och alla rektanglar är parallellogram enligt definition 6.1.3. □

Eftersom sats 6.1.2 uttalar sig om egenskaper för parallellogram gäller den också för romber och kvadrater eftersom de också är parallellogram.

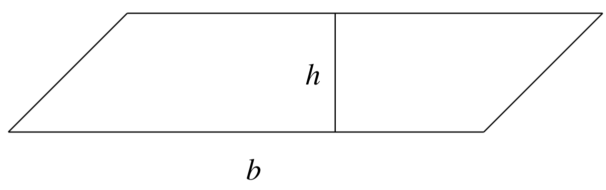
6.2 Några satser om area

Definition 6.2.1. Den yta som tas upp av en kvadrat med sidan 1 är en *areaenhet*.

Sats 6.2.2. *En rektangel vars sidor är a respektive b har arean $a \cdot b$ areaenheter.*

Denna sats tycks självklar, men om sidornas längder inte är rationella tal blir den faktiskt svår att bevisa!

Sats 6.2.3. *Arean av ett parallellogram är $b \cdot h$ areaenheter där b är basen och h är höjden mot basen.*



Sats 6.2.4. *Arean av en triangel med basen* b *och höjden* h *är*

$$\frac{b \cdot h}{2}$$

areaenheter.

Sats 6.2.5. *Areorna för trianglar med lika höjd förhåller sig som baserna.*

Följdsats 6.2.6. *Trianglar med lika baser och höjder har lika stor area.*

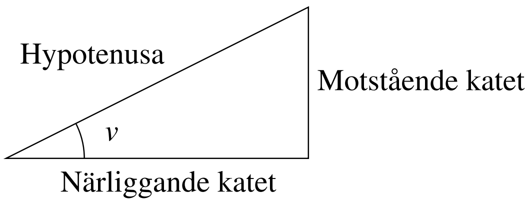
Denna sats kommer att användas i beviset av Pythagoras sats.

7 Rätvinkliga trianglar

7.1 Namngivning av sidor

Definition 7.1.1. En *rätvinklig triangel* är en triangel där en vinkel är rät.

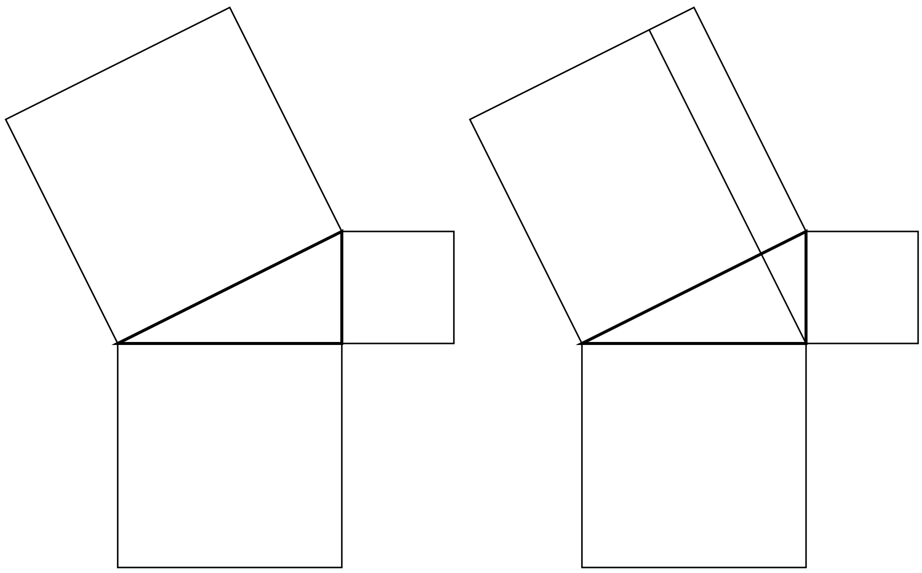
Definition 7.1.2. I en rätvinklig triangel där en icke rät vinkel är v, benämns den längsta av vinkelbenen till v med *hypotenusan*, det andra vinkelbenet den *närliggande kateten* (till v) och triangelns tredje sida den *motstående kateten* (till v).



7.2 Pythagoras sats

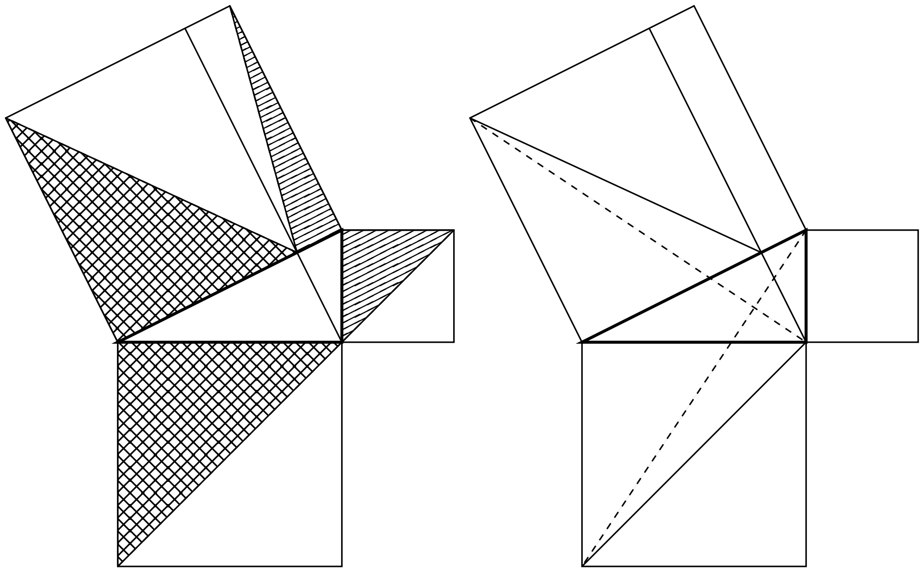
Sats 7.2.1. Pythagoras sats *I en rätvinklig triangel gäller att summan av kvadraterna på de två mindre sidorna (kateterna) är lika med kvadraten på den längsta sidan (hypotenusan).*

Bevis. Följande bildserie visar hur Pythagoras sats kan bevisas.



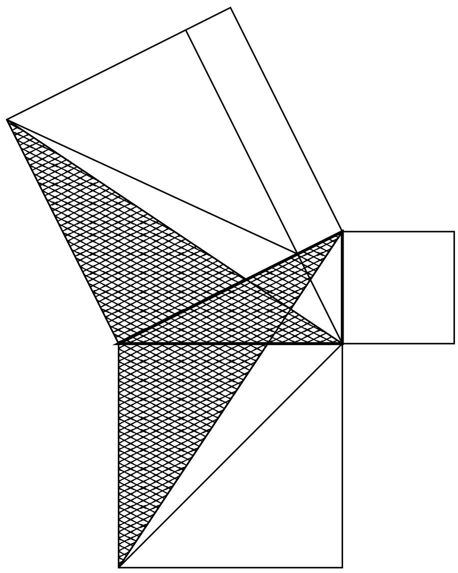
Först exemplifieras hur Pythagoras sats verkligen är en geometrisk sats. Det är alltså inte frågan om att mäta längderna och sedan kvadrera mätetalen. Det som skall visas är att arean för den stora kvadraten är lika stor som summan av arean för de två små.

En linje som är vinkelrät mot hypotenusan dras från den räta vinkeln som klyver den stora kvadraten i två rektanglar, som vardera skall visas är lika stora som de två mindre kvadraterna.



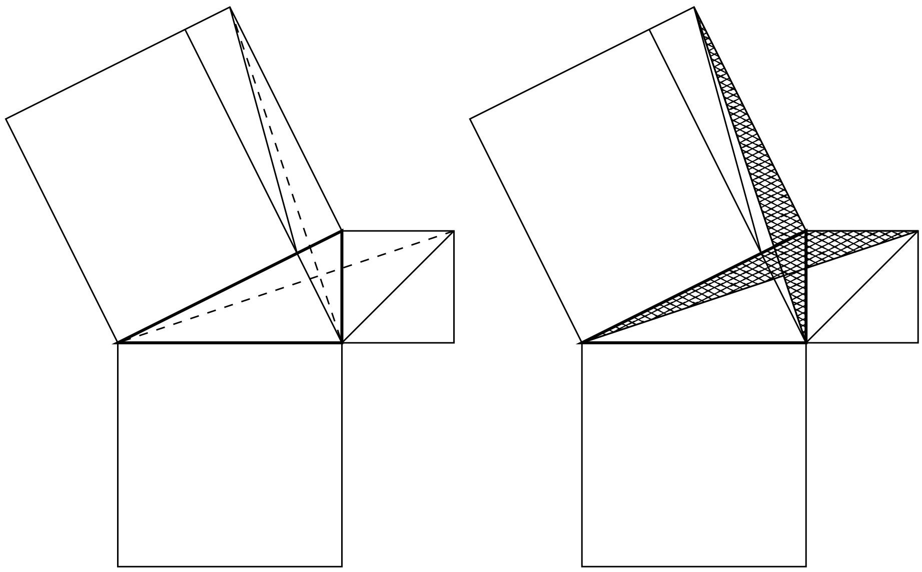
Detta görs genom att dela in rektanglarna i trianglar istället.

Två punkter i de två större trianglarna låter vi nu glida iväg längs två linjer som gör att de fortfarande har samma höjd. Därmed har de oförändrad area under denna transformation.



De två nya trianglarna är kongruenta eftersom de har två lika långa sidor (hypotenusan och den längre av kateterna i den ursprungliga triangeln) och lika mellanliggande vinkel. Eftersom de är kongruenta har de samma area.

Därmed har också den större av de två rektanglarna i steg två och den större av de mindre kvadraterna samma area.



De två sista figurerna visar samma operation, som visar att de två mindre trianglarna har samma area. □

8 Likformighet

8.1 Inledande definitioner

Definition 8.1.1. Två månghörningar är *likformiga* om följande två kriterier är uppfyllda. Dels måste motsvarande vinklar vara lika, dels måste sidorna i den ena månghörningen vara proportionella mot motsvarande sidor i den andra.

Som beteckning för likformighet används symbolen $\sim$, exempel:

$$\triangle ABC \sim \triangle DEF.$$

8.2 Satser om likformiga trianglar

Sats 8.2.1. *Om två sidor i en triangel är proportionella mot två motsvarande sidor i en annan triangel, och mellanliggande vinklar är lika, så är trianglarna likformiga.*

Sats 8.2.2. *Om alla tre sidor i en triangel är proportionella mot motsvarande tre sidor i en annan triangel, så är trianglarna likformiga.*

Sats 8.2.3. *Om två vinklar i en triangel är lika stora som motsvarande två vinklar i en annan triangel, så är trianglarna likformiga.*

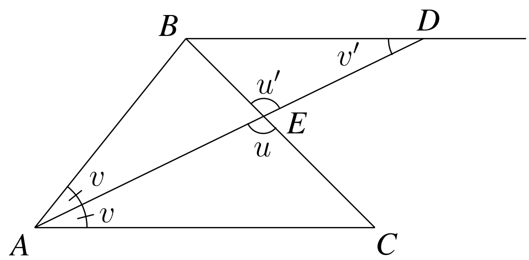
8.3 Bisektriser

Definition 8.3.1. En *bisektris* är en linje som delar en vinkel i två lika delar.

Sats 8.3.2. Bisektrissatsen *En bisektris till en vinkel i en triangel delar motstående sida i delar, som förhåller sig som de övriga sidorna.*

Bevis.

Förutsättningar	**Kvar att visa**
AE är bisektis till $\angle BAC$.	$\frac{\lvert BE\rvert}{\lvert CE\rvert} = \frac{\lvert AB\rvert}{\lvert AC\rvert}$



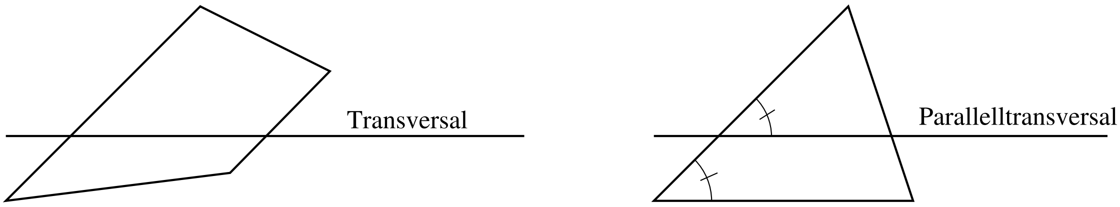
Påstående	**Motivering**
Konstruera linje genom B som är parallell med AC.	
Förläng bisektrisen så att den skär sidan BC i E och den nya linjen i D.	
$u = u'$	Sats 4.2.1 (vertikalvinklar).
$v = v'$	Sats 4.2.3 (lika alternatvinklar).
$\triangle ACE \sim \triangle BED$	Sats 8.2.3 (trianglar med två lika vinklar)
$\frac{\lvert BE\rvert}{\lvert CE\rvert} = \frac{\lvert BD\rvert}{\lvert AC\rvert}$	Likformighet tillämpad.
$\triangle ADB$ likbent, $\lvert BD\rvert = \lvert AB\rvert$.	Sats 5.1.4 (två lika vinklar i triangel).
$\frac{\lvert BE\rvert}{\lvert CE\rvert} = \frac{\lvert AB\rvert}{\lvert AC\rvert}$	

□

8.4 Transversaler

Definition 8.4.1. En linje som går genom en figur benämns *transversal*.

Definition 8.4.2. En transversal som är parallell med en sida i en triangel benämns *parallelltransversal*.



Sats 8.4.3. Topptriangelsatsen *En parallelltransversal avskär en topptriangel som är likformig med hela triangeln.*

Beviset är en enkel tillämpning av sats 4.2.4.

Sats 8.4.4. Transversalsatsen *En parallelltransversal delar två sidor i en triangel i samma förhållande.*

Beviset är en enkel tillämpning av likformighet.

9 Randvinklar och medelpunktsvinklar

9.1 Definitioner av grundläggande begrepp

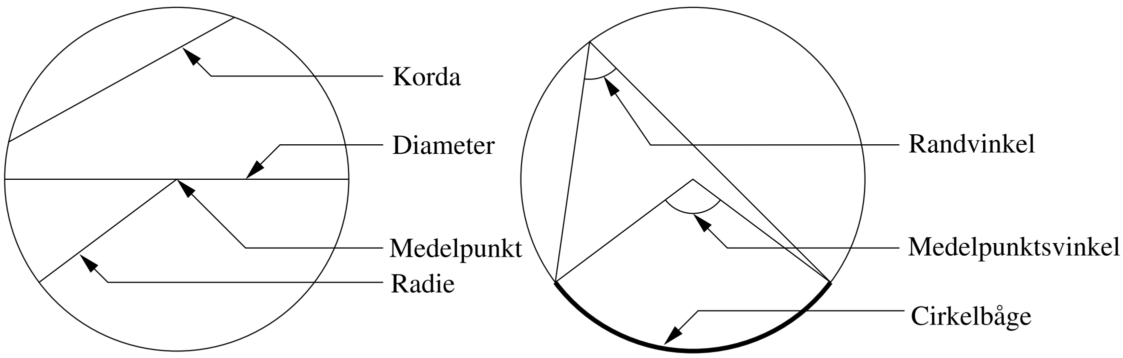
Definition 9.1.1. En *cirkel* är en kurva (en punktmängd) där alla punkter ligger lika långt från en viss punkt, som kallas *cirkelns medelpunkt*. En linje mellan cirkelns medelpunkt och en punkt på cirkeln kallas cirkelns *radie*.

Definition 9.1.2. En *korda* är en sträcka som går mellan två punkter på en cirkel. En korda genom cirkelns medelpunkt kallas cirkelns *diameter*.

Definition 9.1.3. En *randvinkel* är en vinkel mellan två kordor som träffar varandra i en punkt på cirkeln.

Definition 9.1.4. En *cirkelbåge* är en sammanhängande del av cirkeln. Vinkeln mellan de radier som går från cirkelbågens ändpunkter kallas cirkelbågens *medelpunktsvinkel*.

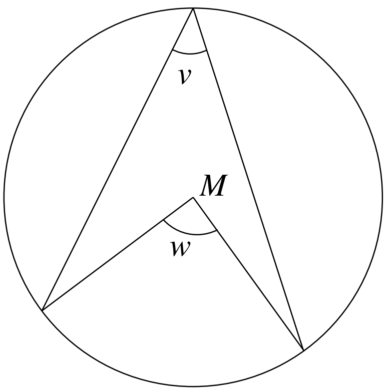
Definition 9.1.5. En *cirkelsektor* är ett område som avgränsas av en cirkelbåge och de radier som går från cirkelbågens ändpunkter.



9.2 Randvinkelsatsen och Thales sats

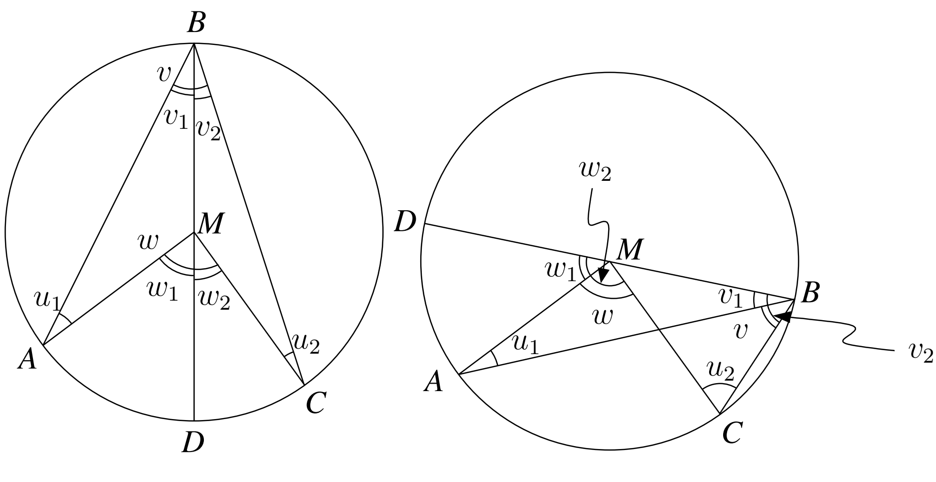
Sats 9.2.1. Randvinkelsatsen *En randvinkel är hälften så stor som en medelpunktsvinkel på samma cirkelbåge. Randvinklar, som står på samma båge, är lika stora.*

Figurerna nedan visar två randvinklar till samma cirkelbåge. Satsen säger alltså att $2v = w$ samt att v är lika stor i båda figurerna.



Bevis.

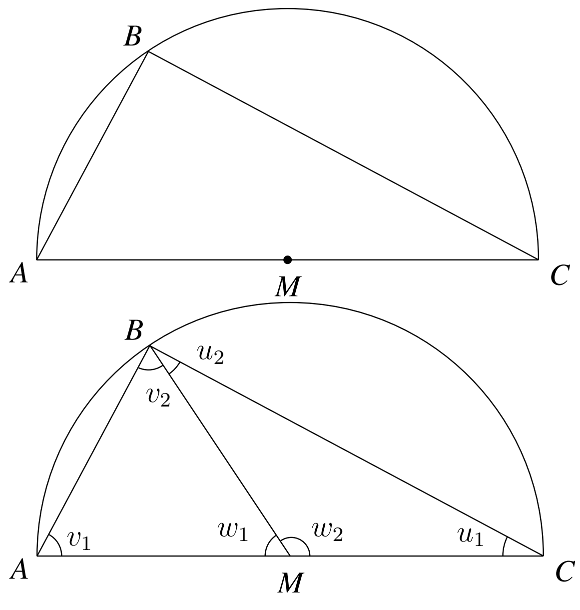
Förutsättningar	**Kvar att visa**
A, B och C är punkter på cirkeln. M är cirkelns medelpunkt.	$w = 2\,v$
Skillnad mellan vänster och höger fall nedan är att M ligger innanför respektive utanför en tänkt triangel $\triangle ABC$.	



Påstående	**Motivering**
Drag stråle från B till D genom M. BD är alltså diameter i cirkeln.	
$\triangle AMB$ och $\triangle BMC$ är likbenta	Två sidor i dessa trianglar är radier i cirkeln.
Trianglarnas basvinklar lika, $v_1 = u_1$ och $v_2 = u_2$	
$w_1 = u_1 + v_1 = 2\,v_1$ $w_2 = u_1 + v_2 = 2\,v_2$	Sats 5.1.2 (yttervinkelsatsen).
$w_1 = 2\,v_1$ $w_2 = 2\,v_2$	
$w = w_2 + w_1 = 2\,v_2 + 2\,v_1 = 2(v_2 + v_1) = 2\,v$ $w = w_2 - w_1 = 2\,v_2 - 2\,v_1 = 2(v_2 - v_1) = 2\,v$	
$w = 2v$	
Alla randvinklar till samma cirkelbåge är lika stora	B var godtycklig

Om BA är en diameter i cirkeln sammanfaller de båda fallen eftersom det då gäller att $v_1 = 0$ eller $v_2 = 0$. □

Följdsats 9.2.2. Thales sats *Varje vinkel inskriven i en halvcirkel är rät.*



Bevis. Här återges två bevis.

Förutsättningar	**Kvar att visa**
AC är diameter i en cirkel med medelpunkt M.	$\angle ABC = 2\,R$
B är en punkt på cirkeln.	

Bevis 1
Betrakta $\angle ABC$ som en randvinkel till en cirkelbåge med medelpunktsvinkel $2R$. Randvinkelsatsen,sats 9.2.1 ger därmed $\angle ABC = R$.

Bevis 2

Påstående	**Motivering**
Drag linje BM.	
$\mathring{A}MB$ och $\triangle BMC$ är likbenta.	Två vinkelben är lika med cirkelns radie.
$v_1 = v_2$ $u_1 = u_2$	Vinklar i en likbent triangel, sats 3.3.4.
$w_1 = u_1 + u_2 = 2\,u_2$ $w_2 = v_1 + v_2 = 2\,v_2$	Sats 5.1.2 (yttervinkelsatsen).
$2R = w_1 + w_2$ $= 2 \cdot (u_2 + v_2)$ $= 2 \cdot \angle ABC$	w_1 och w_2 är sidovinklar.
$\angle ABC = R$	

□

9.3 Vinkelsumman i en triangel, återkomsten

Som en följd av hur man konstruerar en cirkel som går genom alla tre hörn i en given triangel följer, tillsammans med randvinkelsatsen, att man kan bevisa att vinkelsumman i en triangel är två räta.

Det är naturligtvis omständigt att bevisa satserna i denna ordning, men det kan vara illustrera den axiomatiska framväxten av teorin. Mer precist följer detta som två satser.

Sats 9.3.1. *Mittpunktsnormalen till de tre sidorna i en triangel skär varandra i en och samma punkt. Om denna punkt tas som medelpunkt i en cirkel, kan denna cirkels radie väljas så att triangelns alla hörn ligger på cirkeln (triangeln blir därmed inskriven i cirkeln).*

Beviset för denna sats bygger på randvinkelsatsen. Om inte yttervinkelsatsen (sats 5.1.2) visades med hjälp av att vinkelsumman i en triangel är två räta (sats 5.1.3), kan detta nu visas.

Följdsats 9.3.2. *Vinkelsumman i en triangel är två räta.*

Bevis. I konstruktionen av en cirkel som omskriver en cirkel, är cirkeln ($4R$) indelad i tre cirkelbågar. De tre vinklarna i den inskriva triangeln är randvinklar till de tre cirkelbågarna. Därför blir summan av dessa $2R$. □

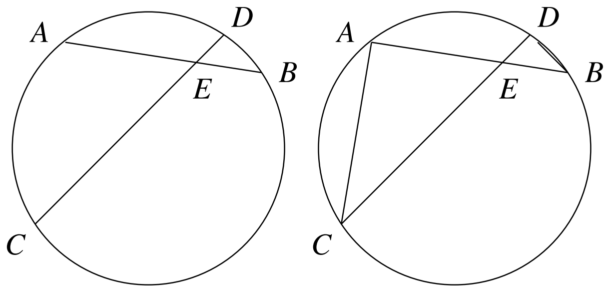
9.4 Kordasatsen

Som avslutning på avsnittet om cirklar kommer en sats som till synes inte har med randvinklar att göra. Däremot används de i satsens bevis.

Sats 9.4.1. Kordasatsen. *Om två kordor skär varandra inuti en cirkel, så är produkten av den ena kordans delar lika med produkten av den andra kordans delar.*

Bevis.

Förutsättningar	**Kvar att visa**
AB och CD är kordor i cirkeln. De skär varandra i punkt E. Se den vänstra figuren nedan.	$\|AE\| \cdot \|BE\| = \|CE\| \cdot \|DE\|$



Påstående	**Motivering**
Dra kordorna AC och BD. Se den högra figuren ovan.	
$\angle CAB = \angle CDB$	Sats 9.2.1 (randvinkelsatsen).
$\angle ACD = \angle ADB$	Sats 9.2.1 (randvinkelsatsen).
$\triangle AEC \sim \triangle DEB$	Sats 8.2.3 (två trianglar med två lika vinklar).
$\dfrac{\|AE\|}{\|CE\|} = \dfrac{\|DE\|}{\|BE\|}$	Likformigheten nyttjas.
$\|AE\| \cdot \|BE\| = \|CE\| \cdot \|DE\|$	

□

En mycket viktig tillämpning av kordasatsen är att konstruktionen av kvadratroten ur ett tal följer ur denna.

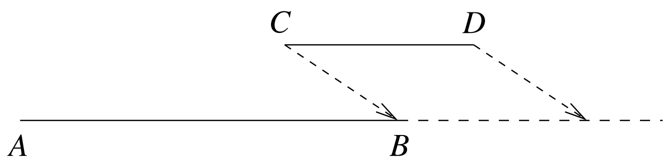
10 Konstruerbara tal och olösbara problem

10.1 Konstruerbara tal

Grekerna gjorde skillnad på talteorin med sin aritmetik och geometrin. De *mätte* inte sträckor och *räknade* ut olika resultat. Men givet två sträckor kan man ändå göra geometriska konstruktioner av summan, differensen, produkten och kvoten av dessa.

Definition 10.1.1. Ett tal är *konstruerbart* om det går att bilda som en geometrisk konstruktion med enbart en ograderad linjal och en passare. ▲

Summan och differensen är triviala och illustreras i figuren nedan. Givet sträckorna AB och CD är det bara att förlänga AB och parallellförflytta CD så att C faller på B för summan, eller så att D faller på B för differensen.

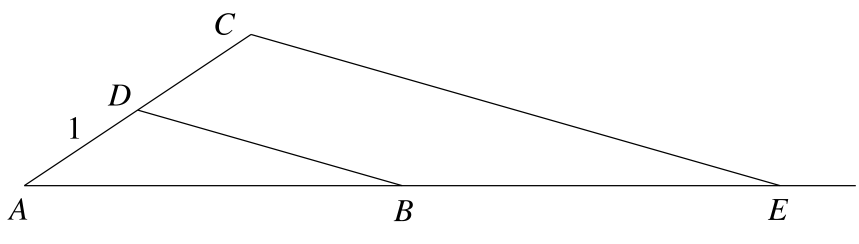


Resonemanget ovan ger alltså att summan och differensen av två tal är konstruerbara. Mindre intuitiv är följande sats.

Sats 10.1.2. *Produkten och kvoten av två tal är konstruerbara.*

Bevis.

Förutsättningar	**Kvar att visa**
AB och AC representerar två konstruerbara tal.	$\lvert AE\rvert = \lvert AC\rvert \cdot \lvert AB\rvert$
Vinkel $\angle CAB$ är godtycklig.	



Påstående	**Motivering**
Markera punkt D på AC så att AD är en längdenhet, dvs $\lvert AD\rvert = 1$. Om $\lvert AC\rvert < 1$ markeras D på förlängningen av AC.	
Drag BD och förläng AB.	
Konstruera punkt E på linjen genom A och B så att CE blir parallell med BD.	
$\angle ADB = \angle ACE$	Sats 4.2.4 (lika likbelägna vinklar).
$\triangle ABD$ och $\triangle AEC$ delar på en vinkel.	
$\triangle ABD \sim \triangle AEC$	Sats 8.2.3 (två lika vinklar).
$\frac{\lvert AB\rvert}{\lvert AD\rvert} = \frac{\lvert AE\rvert}{\lvert AC\rvert}$	Likformigheten nyttjas.
$\lvert AB\rvert \cdot \lvert AC\rvert = \lvert AE\rvert$	$\lvert AD\rvert = 1$

Konstruktionen av kvoten av två tal går till på samma sätt men i omvänd ordning. Låt talen representeras av AE respektive AB. Kvoten kommer då representeras av AC. □

En tvirival följd av att vi kan konstruera kvoten mellan två tal är så viktig att vi formulerar den som en egen sats.

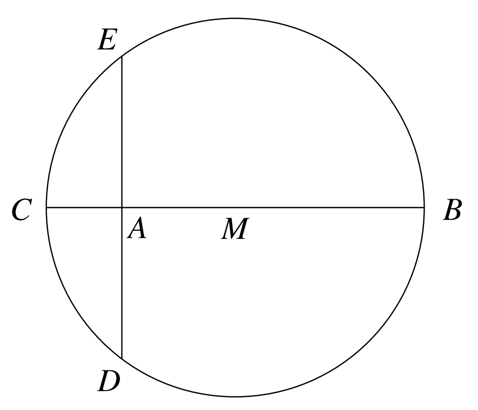
Sats 10.1.3. *De rationella talen är konstruerbara.*

Vi skall snart se att kvadratroten ur ett tal är viktigt. Vi har följande sats.

Sats 10.1.4. *Kvadratroten ur ett tal är konstruerbart.*

Bevis.

Förutsättningar	**Kvar att visa**
AB representerar ett konstruerbart tal.	$\lvert AB\rvert = \lvert AD\rvert^2$



Påstående	**Motivering**
Förläng AB till C så att $\|AC\| = 1$.	AB representerar ett konstruerbart tal.
Konstruerar mittpunkten M på BC.	
Rita cirkeln med medelpunkt i M och MC som radie.	
Konstruera en normal DE till AC genom A.	
$\|AB\| \cdot \|AC\| = \|AD\| \cdot \|AE\|$	Sats 9.4.1 (kordasatsen).
$\|AB\| = \|AD\|^2$	$\|AC\| = 1$

□

På grund av att kvadratroten ur ett tal är konstruerbart, har operationen att roten ur ett tal historiskt betraktats som en lika tillåten operation som addition, subtraktion, multiplikation och division, som ett slags femte räknesätt.

10.2 Olösbara problem

Grekerna försökte sig på att konstruera fram följande.

- Givet två strålar från en punkt, konstruera två strålar från samma punkt som delar den ursprungliga vinkeln i tre lika delar. (*Vinkelns tredelning*)
- Givet en kub, konstruera en ny kub med dubblet så stor volym. (*Kubens fördubbling*)
- Konstruktion av en regelbunden n-hörning för alla n.
- Givet en cirkel, konstruera en kvadrat med lika stor yta. (*Cirkelns kvadratur*)

Grekerna lyckades inte, och ingen av dess efterföljare heller. Det dröjde ända till år 1837 innan Wantzel[3] visade att det att det inte gick att genomföra de tre första konstruktionerna. Anledningen till att det inte går är att dessa problem motsvarar tredjegradsekvationer inom koordinatgeomtrin. Tredje roten ur ett tal är inte konstruerbart.

Dessa resultat är en följd av en Galois-teorin[4]. Ett annat resultat i Galois-teorin är att det inte går att skriva upp en motsvarighet till pq-formeln för polynomekvationer av högre grad än 4. De ”tillåtna” operationerna i ett sådant uttryck är addition, subtraktion, multiplikation, division samt kvadratroten.

Angående det tredje problemet så visade Gauss[5] att ett nödvändigt villkor för att man skall kunna konstruera en n-hörning är att n är ett tal på formen $2^m \cdot z$ där $z = 1$ eller ett primtal som går att skriva $2^{2^m} + 1$.

Wantzel visade att detta krav även är tillräckligt.

[3]Pierre Laurent Wantzel 5/6 1814 – 21/5 1848
[4]Evariste Galois, 25/10 1811 – 31/5 1832
[5]Carl Friedrich Gauss, 30/4 1777 – 23/2 1855

Det sista problmet följer av att π är transcendent, vilket visades 1882 av Lindemann[6].

De olösbara problemen binder på detta sätt i någon mening samman den klassiska geometrin med den moderna matematiken.

[6]Carl Louis Ferdinand von Lindemann 12/4 1852 – 6/3, 1939

Sakregister

Hjärnan i mig ännu vrides
då jag tänker på Euklides
och på de trianglarna ABC och CDA.
Svetten i min panna gnides
värre än på Golgata.

Carl-Michael Bellman